



Mengkaji Penyebaran Penyakit Filariasis Melalui Identifikasi Daerah Kestabilan Dari Revisi Model SAK

E. Susilawati¹, R. Ratianingsih¹ dan A.I. Jaya¹

¹ Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako,
Jalan Sukarno-Hatta Palu,

ABSTRAK

Model *SARK* merupakan model matematika yang dapat digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit Filariasis. Kajian penyebaran penyakit tersebut dilakukan melalui pengamatan terhadap dinamika model *SARK*. Penyebaran penyakit ini dapat dicegah melalui program pengobatan. Pengkajian dilakukan dengan merevisi model *SAK* menjadi model *SARK* untuk selanjutnya dianalisa dengan menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan dengan metode linearisasi, mengkaji kestabilan sistem berdasarkan kriteria nilai eigen dari matriks Jacobian. Hasil penelitian ini adalah model *SARK* sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= B_h + \frac{bI_v S_h P_h}{N_h} - \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \mu_h S_h \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \delta A - \gamma A - \mu_h A \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma A - \mu_h R \\ \frac{dK}{dt} &= \delta A - \mu_h K \\ \frac{dS_v}{dt} &= R_v - P_v b S_v \frac{A}{N_h} - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= (P_v b S_v \frac{A}{N_h}) - \frac{b I_v S_h P_h}{N_h} - \mu_v I_v\end{aligned}$$

yang memiliki satu titik kritis $T_1 = (\frac{B_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{R_v}{\mu_v}, 0)$. Model *SARK* memberikan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ dan λ_5 bernilai negatif dan λ_2 dan λ_6 bernilai positif. Kondisi awal rasio jumlah penduduk pada kelas *infectives*, *recovered* dan *kronis* masing-masing diambil secara berturut-turut 1, 0 dan 0. Hasil identifikasi terhadap peran parameter μ_h, μ_v dan γ adalah semakin besar nilai laju kesembuhan (γ), maka akan mengakibatkan waktu yang dibutuhkan oleh populasi *infectives* (*A*) untuk memasuki populasi *recovered* (*R*) semakin singkat. Hal ini disebabkan peran pengobatan pada populasi *infectives* (*A*) sehingga populasi tersebut sembuh dari penyakit.

Kata Kunci : Model matematika, matriks Jacobi, nilai eigen, system dinamik.

1. Pendahuluan

Terwujudnya keadaan sehat merupakan keinginan setiap orang. Namun sebagian orang tidak memperhatikan kesehatan dan tidak memperhatikan keadaan lingkungan sekitar yang tidak saja menjadi habitat manusia namun juga

vektor pembawa penyakit, misalnya nyamuk. Nyamuk tidak saja dikenal sebagai vektor dalam penyebaran penyakit Malaria dan Demam Berdarah Dengue (DBD). Nyamuk juga merupakan binatang yang menjadi perantara dalam penyebaran penyakit kaki gajah (Filariasis).

Filariasis adalah penyakit menular menahun yang disebabkan oleh sejenis Cacing Darah-Jaringan dari Genus *Filaria*, yang penularannya pada manusia melalui gigitan berbagai spesies nyamuk. Filariasis bukan merupakan penyakit yang mematikan tetapi orang yang menderita penyakit tersebut dapat cacat seumur hidup sehingga mengakibatkan turunnya produktivitas secara individual, keluarga, maupun masyarakat. Penyakit ini menjadi masalah kesehatan masyarakat yang penting terutama bagi daerah pedesaan di luar pulau Jawa-Bali karena mengakibatkan berkurangnya kemampuan kerja masyarakat dan cacat yang ditimbulkannya.

Filariasis ditemukan di daerah tropis Asia, Afrika, Amerika tengah dan selatan, dengan 120 juta manusia terjangkit. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Departemen Kesehatan Republik Indonesia, Filariasis ditemukan di berbagai daerah dataran rendah yang berawa dengan hutan-hutan belukar yang umumnya didapat di pedesaan di luar Jawa-Bali. Selain di pedesaan, Filariasis juga ditemukan di perkotaan. Filariasis yang menyerang daerah perkotaan yaitu *Wuchereria bancrofti*. Infeksi *Wuchereria bancrofti* tersebar luas di daerah tropik dan subtropik dan hanya dapat hidup pada manusia. Penularannya melalui vektor nyamuk *Culex quinquefasciatus* sedangkan di daerah pedesaan Filariasis ditularkan oleh *Anopheles sp*, *Aedes sp*, dan *Mansonia sp*. Filariasis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh infeksi Cacing *Mikrofilaria*, di Indonesia ditemukan tiga spesies Cacing *Filaria* yang merupakan penyebab penyakit Filariasis, *Wuchereria bancrofti*, *Brugia malayi*, dan *Brugia timori*.

Penyebaran penyakit Filariasis dengan memandang pertumbuhan vektor sebagai pembawa penyakit dan manusia sebagai penderita yang terjangkitinya. Dalam populasi nyamuk, terdapat kelompok *susceptible* (S_v), yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat

terinfeksi penyakit, dan kelompok *infectives* (I_v), yaitu kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit. Nyamuk yang terinfeksi dapat menggigit manusia. Dalam hal ini manusia di kelompokkan atas kelompok *susceptible* (S_h), yaitu kelompok yang sehat tetapi dapat terinfeksi, kelompok *pernah terinfeksi* (A) dan kelompok *terinfeksi Kronis* (K). Model ini dikenal dengan SAK.

Kelompok pernah terinfeksi sebagian mendapatkan pengobatan sedemikian hingga dapat di sembuhkan. Sebagian lainnya tidak mendapatkan pengobatan sehingga memasuki kelompok Kronis. Penelitian ini secara matematis ingin meninjau penyebaran penyakit yang diamati dengan menambahkan kelompok *recovered* (R) pada populasi manusia. Penambahan kelompok pada model SAK menjadi model SARK dilakukan mengingat penderita penyakit Filariasis masih memiliki peluang untuk sembuh, meskipun secara fisik masih memerlukan tindakan medis lain. Pengamatan terhadap kestabilan revisi model SAK dilakukan dengan mengidentifikasi daerah parameter yang membuat model tersebut stabil di daerah parameternya.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Filariasis (Kaki Gajah)

Filariasis (Kaki Gajah) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh Cacing *Filaria* yang ditularkan oleh berbagai jenis nyamuk. Penyakit ini bersifat menahun (*kronis*) dan jika tidak mendapatkan pengobatan dapat menimbulkan cacat menetap berupa pembesaran kaki, lengan dan alat kelamin baik perempuan maupun laki-laki. Akibatnya penderita tidak dapat bekerja secara optimal. Bahkan hidupnya tergantung kepada orang lain sehingga menjadi beban keluarga, masyarakat dan Negara. Di Indonesia penyakit kaki gajah tersebar luas hampir diseluruh provinsi.

2.2 Penyebaran Penyakit Filariasis

Di Indonesia hingga saat ini telah diketahui ada 23 spesies nyamuk dari Genus *Anopheles*, *Culex* (nyamuk got), *Mansonia* (nyamuk rawa), *Aedes* & *Armigeres*, yang dapat berperan sebagai vektor penular penyakit kaki gajah. Filariasis ditularkan melalui nyamuk yang menghisap darah seseorang yang telah tertular sebelumnya atau seseorang dapat tertular atau terinfeksi apabila orang tersebut digigit nyamuk yang infeksi, yaitu nyamuk yang mengandung larva stadium III (L3).

Nyamuk tersebut menyandang Cacing Filaria kecil (*Mikrofilaria*) sewaktu menghisap darah penderita yang mengandung *mikrofilaria* atau binatang *reservoir* yang mengandung *Mikrofilaria*. Siklus penularan penyakit kaki gajah ini melalui dua tahap, yaitu perkembangan dalam tubuh nyamuk (vektor) dan kedua perkembangan dalam tubuh manusia (*hospes*) atau *reservoir*

2.3 Pengobatan Penyakit Filariasis

Pencegahan terhadap penyakit Filariasis dilakukan dengan berusaha menghindarkan diri dari gigitan nyamuk vektor (mengurangi kontak dengan vektor). Pemberantasan nyamuk dapat dilakukan dengan membersihkan tanaman air pada rawa-rawa yang merupakan tempat perindukan nyamuk, menimbun, mengeringkan, atau mengalirkan genangan air sebagai tempat perindukan nyamuk, dan membersihkan semak – semak disekitar rumah. Pengobatan Filariasis dilakukan dengan cara pengobatan massal, pengobatan selektif, dan pengobatan individual (penderita kronis)

2.4 Model SAK

Model matematika, dengan menggunakan asumsi populasi awal manusia masih *virgin* artinya mula-mula belum ada penyakit Filariasis, dan populasi total manusia adalah konstan. Populasi manusia dibagi menjadi tiga sub-populasi, rentan S_h , pernah terinfeksi A dan

populasi terinfeksi kronis K , dengan jumlah total N_h . Populasi nyamuk dibagi dalam dua subpopulasi, rentan S_v dan nyamuk terinfeksi I_v , dengan jumlah total N_v .

Parameter pada kelompok manusia yang terkait dengan model adalah tingkat perekrutan manusia B_h , tingkat kematian manusia secara alami μ_h dan tingkat keberhasilan penularan dari nyamuk untuk manusia rentan p_h . tingkat gigitan nyamuk pada manusia pada b , dan tingkat gigitan nyamuk yang mengindikasikan gejala δ . Adapun parameter pada kelompok vektor yang terkait dengan model adalah tingkat rekrutmen nyamuk R_v , tingkat kematian nyamuk secara alami μ_v dan tingkat keberhasilan penularan filaria dari manusia ke nyamuk rentan p_v . Jika perawatan medis diukur dari banyaknya orang yang terjaring oleh aparat kesehatan sebesar n , maka persamaan differensial yang mengatur interaksi semua variabel dapat dinyatakan sebagai model SAK sebagai berikut :

$$S_h(t) = B_h - \frac{bI_vS_hp_h}{N_h} - \mu_hS_h + \frac{p_0nA^2\delta}{N_h} \quad (2.1)$$

$$A(t) = \frac{bI_vS_hp_h}{N_h} - \delta A - \mu_hA - \frac{p_0nA^2\delta}{N_h} \quad (2.2)$$

$$K(t) = \delta A - \mu_hK \quad (2.3)$$

$$S_v(t) = R_v - \frac{bS_vAp_v}{N_h} - \mu_vS_v \quad (2.4)$$

$$I_v(t) = \frac{bS_vAp_v}{N_h} - \mu_vI_v \quad (2.5)$$

Mengingat penderita Filariasis yang melakukan pengobatan dapat disembuhkan, penelitian ini membagi populasi manusia menjadi empat sub populasi yaitu dengan menambahkan kelompok manusia terinfeksi yang sudah sembuh setelah melakukan pengobatan sebagai R . Diasumsikan bahwa kelompok ini sudah kebal terhadap penyakit Filariasis sehingga model matematika SAK dalam penelitian ini adalah model akan di revisi menjadi SARK.

2.5 Kestabilan Sistem

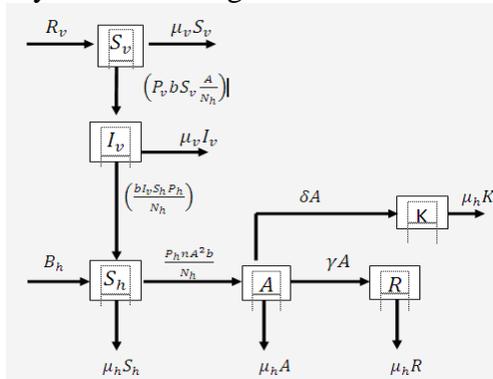
Menurut Finizio dan Ladas, stabil berarti bahwa perubahan kecil dalam sistem hanya akan menyebabkan pengaruh

kecil pada penyelesaian sistem. Sedangkan tidak stabil berarti bahwa perubahan tersebut mempunyai pengaruh besar dalam penyelesaian sistem. Lebih lanjut, kriteria kestabilan juga dapat diamati berdasarkan arah trayektori pada bidang fase, sebagaimana dituliskan Giordano *et al.* Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika untuk sembarang syarat awal yang dekat dengan titik kesetimbangan sistem, maka arah trayektori penyelesaian sistem masih tetap dekat dengan penyelesaian sistem di titik kesetimbangannya untuk sepanjang waktu t . Sebaliknya, titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika untuk sembarang syarat awal yang diberikan disekitar titik kritis, menghasilkan penyelesaian sistem dengan arah trayektori yang menjauh dari titik tersebut.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Hasil Penelitian

Model SAK yang dinyatakan dalam persamaan (2.1)-(2.5) direvisi menjadi model SARK. Revisi model dilakukan dengan menambahkan peran pengobatan terhadap penderita Filariasis. Hal ini mengakibatkan populasi manusia terbagi dalam empat kelompok yaitu kelompok *susceptible* (S_h), yaitu kelompok yang sehat tetapi dapat terinfeksi, kelompok *infectives* (A), kelompok *Kronis* (K), dan kelompok *recovered* (R). Alur perpindahan individu S_v menjadi I_v pada nyamuk dan individu S_h menjadi A, K dan R dinyatakan dalam gambar 4.1 berikut :



Gambar 4.1 . Alur perpindahan individu S_v menjadi I_v pada nyamuk dan individu S_h menjadi A, K dan R

Dari kompartemen pada gambar 4.1 dibangun model matematika penyebaran penyakit filariasis sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = B_h + \frac{b I_v S_h P_h}{N_h} - \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \mu_h S_h \quad (4.1)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \delta A - \gamma A - \mu_h A \quad (4.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma A - \mu_h R \quad (4.3)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (4.4)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - P_v b S_v \frac{A}{N_h} - \mu_v S_v \quad (4.5)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = (P_v b S_v \frac{A}{N_h}) - \frac{b I_v S_h P_h}{N_h} - \mu_v I_v \quad (4.6)$$

Pada suatu daerah parameter yang memberikan sistem mencapai kestabilan penyakit filariasis pada akhirnya dapat menghilang dari populasi. Hal ini diindikasikan melalui penurunan banyaknya populasi kelompok A dan K serta peningkatan populasi R .

3.2 Menentukan Titik Kritis Model SARK

Kestabilan model revisi SAK dilakukan dengan terlebih dahulu menentukan titik-titik kritis sistem yang dibangun persamaan (4.1) - (4.6). Titik-titik kritis tersebut diperoleh dengan menentukan nilai S_h, A, R, K, S_v, I_v sedemikian hingga

$$\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dK}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$$

sistem hanya memiliki satu titik kritis yaitu $T_1 = (\frac{B_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{R_v}{\mu_v}, 0)$. Mengingat titik kritis bukan titik nol, maka dilakukan transformasi pada sistem sehingga linearisasi sistem di titik kritis baru $(0,0,0,0,0,0)$ memberikan nilai – nilai eigen untuk T_1 adalah:

$$\lambda_1 = -\frac{\mu_h^2 N_h}{N_h \mu_h}, \quad \lambda_2 = \frac{P_h n b}{N_h \mu_h} - \delta - \gamma - \mu_h,$$

$$\lambda_3 = -\mu_h, \quad \lambda_4 = -\mu_h, \quad \lambda_5 = -\frac{\mu_v^2 N_h}{N_h \mu_v},$$

$$\lambda_6 = \frac{b P_h B_h - N_h \mu_h \mu_v}{N_h \mu_h \mu_v}$$

Karena $\mu_h N_h > 0$, $\mu_h > 0$ dan $\mu_v N_h > 0$ maka $\lambda_1 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$ yang memberikan empat nilai eigen bernilai negatif. Dengan melihat teori kestabilan titik tetap dapat disimpulkan bahwa sistem stabil. λ_2 dan λ_6 bernilai positif, maka untuk

menentukan agar sistem stabil perlu dilakukan syarat agar λ_2 dan λ_6 bernilai negatif melalui kurva parameter.

3.3 Menentukan Kurva parameter

Kriteria kestabilan titik tetap mensyaratkan bahwa agar sistem stabil maka semua bagian real dari nilai-nilai eigen harus bernilai negatif. $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ dan λ_5 senantiasa bernilai negatif sedangkan λ_2 dan λ_6 bernilai positif. Kriteria inilah yang dijadikan dasar dalam penentuan kurva parameter mengingat λ_2 dan λ_6 bernilai positif, maka mensyaratkan agar λ_2 bernilai negatif diperoleh sebagai berikut

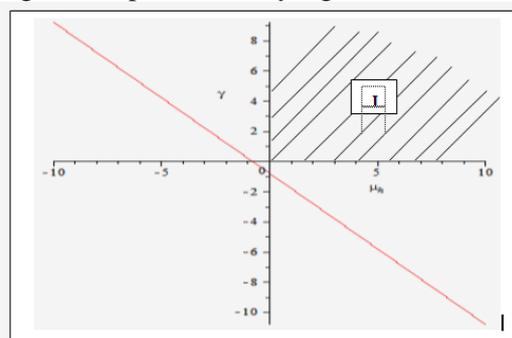
$$\frac{P_h n b}{N_h \mu_h} - \delta - \gamma - \mu_h < 0$$

Dalam hal ini persamaan (4.30) menjadi sebagai berikut :

$$\frac{P_h n b}{N_h \mu_h} < \delta + \gamma + \mu_h$$

Dengan meninjau persamaan (4.8), tingkat keberhasilan penularan dari nyamuk ke manusia sehat (P_h), tingkat perawatan medis (n), tingkat gigitan nyamuk pada manusia (b) harus lebih kecil dengan menambahkan laju kesembuhan (γ), kematian manusia (μ_h) dan gejala kronis (δ).

Untuk nilai-nilai $P_h = 0.001$, $n = 1$, $b = 243$, $\delta = 0.2$ dan $N_h = 1$ (Supriatna,2009), persamaan (4.7) dapat ditempatkan dalam suatu bidang parameter γ dan μ_h . (Lihat gambar 4.2). Tampak bahwa persamaan tersebut membagi bidang (γ, μ_h) atas dua daerah dimana pada dua daerah tersebut λ_2 berbeda tanda. Adapun nilai λ_2 tepat pada kurva adalah nol. Mengingat γ dan μ_h bernilai positif, hanya terdapat satu domain daerah parameter yang dimiliki oleh sistem yang berada pada daerah yang diarsir



Gambar 4.2 Diagram parameter γ dan μ_h di titik kritis T_1

Syarat agar λ_6 bernilai negatif diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{b P_h B_h - N_h \mu_h \mu_v}{N_h \mu_h \mu_v} < 0$$

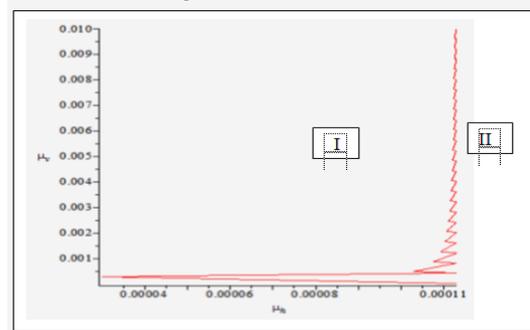
Mengingat N_h, μ_h dan μ_v bernilai positif kita dapat memandang persamaan berikut :

$$b P_h B_h - N_h \mu_h \mu_v < 0$$

Dalam hal ini persamaan (4.33) menjadi sebagai berikut:

$$b P_h B_h < N_h \mu_h \mu_v$$

Untuk nilai-nilai $P_h = 0.001$, $b = 243$, $N_h = 1$ dan $B_h = 1$ (Supriatna,2009), persamaan (4.11) dapat ditempatkan dalam suatu bidang parameter μ_h dan μ_v . (Lihat gambar 4.3). Tampak bahwa persamaan tersebut membagi bidang (μ_h, μ_v) atas dua daerah. Nilai-nilai eigen pada dua daerah tersebut perlu diidentifikasi sedemikian hingga perilaku kestabilan dititik kritis pada daerah-daerah tersebut dapat diketahui.



Gambar 4.3 Diagram parameter μ_h dan μ_v di titik kritis T_1

3.4 Mengidentifikasi Daerah Kestabilan Model SARK Pada Bidang Parameter

Gambar 4.2 kita memperlihatkan bahwa persamaan (4.7) senantiasa dipenuhi oleh nilai parameter γ dan μ_h yang akan digunakan dalam simulasi. Pemilihan nilai γ berturut-turut adalah 0.01, 0.02, 0.03 dan μ_h berturut-turut adalah 0.29, 0.31 dan 0.33 pada daerah di bidang (γ, μ_h) yang akan memberikan tanda nilai eigen λ_2 yang senantiasa negatif.

Melalui Gambar 4.3 kita dapat menggunakan persamaan (4.9) untuk membantu menentukan nilai parameter

μ_v dan μ_h yang akan digunakan dalam simulasi. Terdapat dua daerah pada bidang (μ_v, μ_h) yang dipisahkan oleh persamaan (4.34). Hal ini mengakibatkan pemilihan nilai μ_v berturut-turut adalah 0.9, 0.4, 0.3 dan μ_h berturut-turut adalah 0.29, 0.31 dan 0.33 pada daerah yang berbeda dibidang (μ_h, μ_v) yang akan memberikan tanda nilai eigen yang berbeda. Kurva pada gambar tersebut menjadi pembatas pemilihan pemilihan parameter μ_v dan μ_h yang memberikan nilai λ_6 positif atau negatif.

Nilai-nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dan λ_6 pada daerah-daerah dibidang (μ_h, γ) dan (μ_h, μ_v) berdasarkan identifikasi terhadap Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 dapat dilihat pada Table 4.1

Tabel 4.1 Identifikasi nilai eigen λ_2 dan λ_6 untuk μ_h, μ_v dan γ yang bervariasi

μ_h	μ_v	γ	Nilai Eigen					
			λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0.29	0.9	0.01	-0.29	-0.25	-0.29	-0.29	-0.9	-0.06
0.31	0.4	0.03	-0.31	-0.29	-0.31	-0.31	-0.4	0.95
0.33	0.3	0.05	-0.33	-0.36	-0.33	-0.33	-0.3	1.45

3.5 Simulasi

simulasi penyebaran penyakit filariasis untuk nilai-nilai parameter μ_h, μ_v dan γ yang dinyatakan pada Table 4.1. Mengingat ketiga parameter tersebut merupakan laju kematian populasi manusia dan nyamuk serta laju kesembuhan poplasi manusia maka nilai ketiganya diambil dalam interval 0-1. Nilai B_h dan R_v sama dengan 0 menggambarkan populasi nyamuk dan manusia diambil dengan tingkat kelahiran 1. Diberikan tingkat keberhasilan penularan dari nyamuk untuk manusia rentan $P_h = 0.001$, dengan perawatan medis yang diukur dengan jumlah orang disaring oleh kesehatan sebesar $n = 1$, dan tingkat gigitan nyamuk pada manusia adalah $b = 243$. Kondisi awal rasio jumlah penduduk pada kelas *infectives, recovered* dan *Kronis* masing-masing diambil secara berturt-turut 1, 0 dan 0.

Kondisi ini menggambarkan pada kondisi awal seluruh populasi *susceptible* terinfeksi penyakit Filariasis dan populasi *recovered* dan *kronis* masih sama dengan nol. Simulasi model penyebaran penyakit digambarkan untuk pemilihan nilai μ_h, μ_v , dan γ pada Table 4.1. Pemilihan tersebut memberikan sistem-sistem persamaan differensial berikut ini :

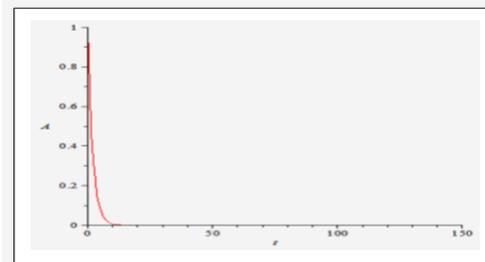
Untuk sistem I dengan $\mu_h = 0.29, \mu_v = 0.9, \gamma = 0.01$ dinamika populasi *infectives, recovered*, dan *kronis* yang diberikan dari model SARK dalam persamaan (4.2), (4.3) dan (4.4) dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{(0.001)(1)A^2(243)}{1} - 0.2A - 0.01A - 0.29A \quad (4.12)$$

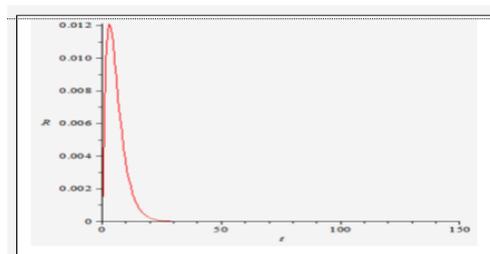
$$\frac{dR}{dt} = 0.01A - 0.29R \quad (4.13)$$

$$\frac{dK}{dt} = 0.2A - 0.29K \quad (4.14)$$

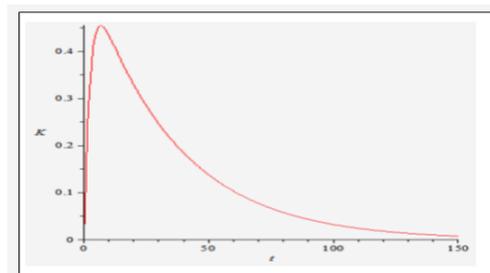
Populasi kelompok *infectives, recovered* dan *kronis* terhadap waktu yang merupakan solusi dari Sistem Persamaan Differensial (4.12),(4.13) dan (4.14) secara berturut-turut disajikan melalui program *maple* pada Gambar (4.4), (4.5) dan (4.6)



Gambar 4.4 Proporsi individu *infectives*



Gambar 4.5 Proporsi individu *recovered*



Gambar 4.6 Proporsi individu *kronis*

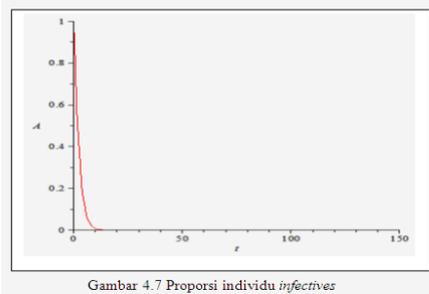
Untuk sistem II dengan $\mu_h = 0.31$, $\mu_v = 0.4$, $\gamma = 0.03$ dinamika populasi *infectives*, *recovered*, dan *kronis* yang diberikan dari model SARK dalam persamaan (4.2), (4.3) dan (4.4) dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{(0.001)(1)A^2(243)}{1} - 0.2A - 0.01A - 0.31A \quad (4.15)$$

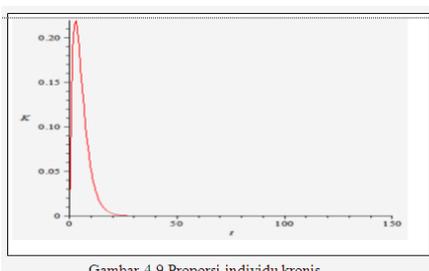
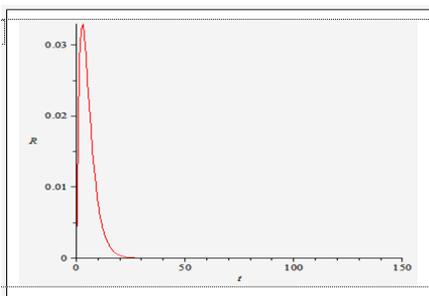
$$\frac{dR}{dt} = 0.03A - 0.31R \quad (4.16)$$

$$\frac{dK}{dt} = 0.02A - 0.31K \quad (4.17)$$

Populasi kelompok *infectives*, *recovered* dan *kronis* terhadap waktu yang merupakan solusi dari Sistem Persamaan Differensial (4.15),(4.16) dan (4.17) secara berturut-turut disajikan melalui program *maple* pada gambar (4.7), (4.8) dan (4.9)



Gambar 4.7 Proporsi individu *infectives*



Gambar 4.9 Proporsi individu kronis

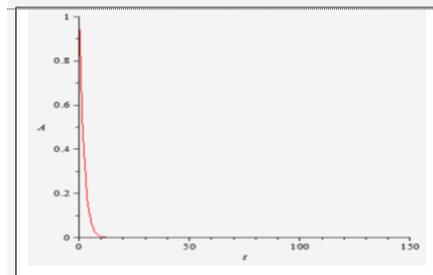
Untuk sistem III dengan $\mu_h = 0.08$, $A = 0.3$, $\gamma = 0.03$ dinamika populasi *infectives*, *recovered*, dan *kronis* yang diberikan dari model SARK dalam persamaan (4.2), (4.3) dan (4.4) dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt} = \frac{(0.001)(1)A^2(243)}{1} - 0.2A - 0.05A - 0.3 \quad (4.18)$$

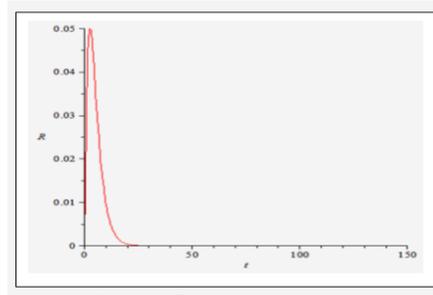
$$\frac{dR}{dt} = 0.05A - 0.33R \quad (4.19)$$

$$\frac{dK}{dt} = 0.02A - 0.33K \quad (4.20)$$

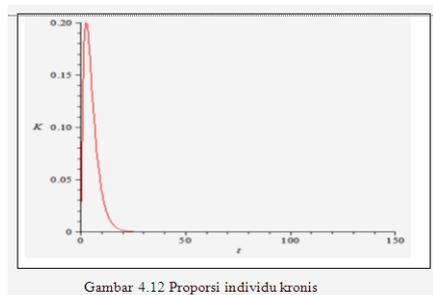
Populasi kelompok *infectives*, *recovered* dan *kronis* terhadap waktu yang merupakan solusi dari Sistem Persamaan Differensial (4.18),(4.19) dan (4.20) secara berturut-turut disajikan melalui program *maple* pada gambar (4.10), (4.11) dan (4.12)



Gambar 4.10 Proporsi individu *infectives*



Gambar 4.11 Proporsi individu *recovered*

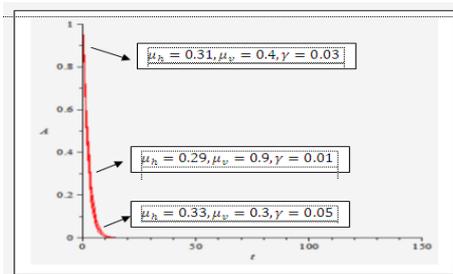


Gambar 4.12 Proporsi individu kronis

3.6 Pembahasan

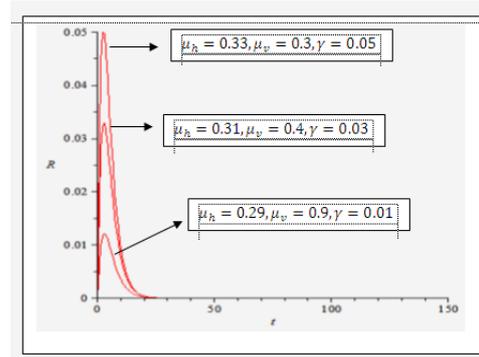
Gambar (4.4),(4.7) dan (4.10) menunjukkan bahwa individu terinfeksi mengalami penurunan endemisitas populasi manusia dari awal secara terus menerus. Hal ini terjadi karena manusia yang terinfeksi penyakit akan mengalami kesembuhan atau penyakit tersebut

bertambah kronis seiring berjalannya waktu sehingga populasi manusia kelompok *infektives* memasuki kelompok *recovered* atau kronis. Gambar 4.13 menggambarkan perubahan populasi tersebut untuk nilai μ_h , μ_v dan γ yang digerakkan. Semakin besar nilai laju kesembuhan akan mengakibatkan waktu yang dibutuhkan oleh populasi *infektives* untuk memasuki populasi *recovered* semakin singkat.



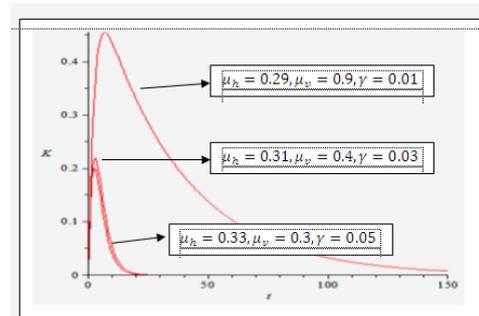
Gambar 4.13 Proporsi individu *infektives* pada model (4.4),(4.7) dan (4.10)

Gambar (4.5), Gambar (4.8) dan Gambar (4.11) menunjukkan bahwa jumlah individu *recovered* pada mulanya mengalami kenaikan yang diakibatkan oleh masuknya populasi *infektives* kelompok *recovered*. Hal tersebut disebabkan adanya individu *infektives* yang melakukan pengobatan sehingga sembuh dari penyakit. Pada waktu tertentu, proporsi individu *recovered* tidak mengalami perubahan karena seluruh populasi sudah masuk kelompok *recovered* sampai pada akhirnya populasi *recovered* menurun menuju nol. Gambar 4.14 menggambarkan perubahan populasi *recovered* untuk nilai μ_h , μ_v dan γ yang digerakkan. Semakin besar nilai laju kesembuhan pada populasi manusia maka akan mengakibatkan populasi *infektives* untuk memasuki populasi *recovered* semakin singkat seiring berjalannya waktu. Hal ini terjadi dengan adanya peran pengobatan pada populasi manusia yang terinfeksi sehingga populasi tersebut sembuh dari penyakit.



Gambar 4.14 Proporsi individu *recovered* pada model (4.5),(4.8) dan (4.11)

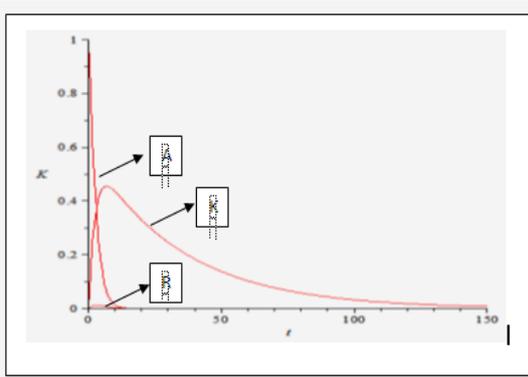
Gambar (4.6), Gambar (4.9) dan Gambar (4.12) menunjukkan bahwa jika untuk perawatan medis $n = 1$ pada populasi kronis setelah adanya infeksi pertama pada manusia, maka dalam jangka panjang keseimbangan tingkat untuk populasi kronis mengalami penurunan, yang menunjukkan bahwa tingkat endemisitas penyakit menurun. Gambar 4.15 menggambarkan perubahan populasi *kronis* untuk nilai μ_h , μ_v dan γ yang digerakkan. Semakin besar nilai laju kesembuhan maka seiring berjalannya semakin menurun populasi tersebut memasuki *kronis*. Hal ini terjadi karena adanya peran pengobatan pada manusia *infektives*.



Gambar 4.15 Proporsi individu *infektives* pada model (4.6),(4.9) dan (4.12)

Interprestasi terhadap Tabel 4.1 menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai laju kematian pada populasi manusia μ_h , dapat membawa sistem tidak dapat mempertahankan kestabilan karena nilai λ_6 dapat berubah menjadi positif. Laju kematian pada populasi nyamuk μ_v memiliki karakteristik yang sebaliknya penurunan nilai laju kematian nyamuk

yang akan membawa sistem menjadi tidak stabil.



Gambar 4.16 Proporsi individu *infektives*, *recovered* dan *kronis*

3.7 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model SARK

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= B_h + \frac{bI_v S_h P_h}{N_h} - \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \mu_h S_h \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{P_h n A^2 b}{N_h} - \delta A - \gamma A - \mu_h A \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma A - \mu_h R \\ \frac{dK}{dt} &= \delta A - \mu_h K \\ \frac{dS_v}{dt} &= R_v - P_v b S_v \frac{A}{N_h} - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= (P_v b S_v \frac{A}{N_h}) - \frac{b I_v S_h P_h}{N_h} - \mu_v I_v \end{aligned}$$

model tersebut memiliki satu titik kritis yaitu

$$T_1 = \left(\frac{B_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{R_v}{\mu_v}, 0 \right)$$

2. Pada simulasi, penyebaran penyakit Filariasis yang dibutuhkan untuk mencegah penyakit yaitu semakin besarnya laju kesembuhan (γ) pada populasi manusia akan menyebabkan individu populasi *infektives* (A) pada titik kesetimbangannya semakin kecil dan penyakit akan menghilang dari populasi dalam waktu yang cepat.
3. Hasil identifikasi daerah kestabilan $\lambda_1 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$ memberikan empat nilai eigen bernilai negatif. Dengan melihat teori kestabilan titik tetap sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem stabil. λ_2 dan λ_6 bernilai positif, maka untuk menentukan agar sistem stabil perlu dilakukan syarat

untuk λ_2 dan λ_6 yaitu $\frac{P_h n b}{N_h \mu_h} < \delta + \gamma + \mu_h$ dan $b P_h B_h < N_h \mu_h \mu_v$ melalui kurva parameter.

4. Peran parameter μ_h, μ_v dan γ adalah semakin besar nilai laju kesembuhan (γ), maka akan mengakibatkan waktu yang dibutuhkan oleh populasi *infektives* (A) untuk memasuki populasi *recovered* (R) semakin singkat. Hal ini terjadi karena adanya penambahan peran pengobatan pada populasi manusia yang terinfeksi sehingga populasi tersebut sembuh dari penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

- Finizio, N. and G. Ladas, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, 2 ed. Alih bahasa: W. Santoso, Erlangga, Jakarta, 1988.
- Ilyas, I. 1990. *Program Pemberantasan Filaria di Indonesia Sub Direktorat Filariasis, Direktorat Jenderal PPM dan PLP Departemen Kesehatan RI*. Jakarta.
- Karmana, Oman. 2006. *Biologi Kelas XI Semester I Sekolah Menengah Atas*. Cetakan Pertama. Bandung : Grafindo Media Pratama.
- Supriatna A.K, Serviana H, Soewono E. Vol 41 A. No.1, 2009. *Model Matematika Penyelidikan Jangka Panjang Pengaruh Pengobatan Filariasis Limfatik medis di Jati Sampurna di Jawa barat*. ITB.
- Supriyadi A. *Filariasis : Daur Ulang*. 2009. <http://recyclearea.wordpress.com/2009/09/03/filariasis/>. Diakses 20 Mei 2012